Concours 1991 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

***

Epreuve spécialisée de MATHEMATIQUES - (Option Mathématiques)

NB : - Le sujet comprent trois parties qui ne sont pas indépendantes.
- Il sera tenu compte, dans la notation, de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.
- Il est demandé de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé. Toutefois, les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés.
- Les résultats devront être soulignés ou encadrés.

***

Notations :

La suite complexe de terme général α_n est notée $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou plus simplement (α_n) ou plus simplement α .

La série complexe de terme général u_n pourra être notée $[u_n]_{n \in \mathbb{N}}$, ou plus simplement $[u_n]$, ou plus simplement u .

L'ensemble de ces séries est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel noté S . Le sous-espace vectoriel de S, formé des séries dont le terme général tend vers 0 en $+\infty$, est noté S_0 . Le sous-espace vectoriel de S, formé des séries convergentes, est noté S_C . Le sous-espace vectoriel de S, formé des séries absolument convergentes, est noté S_{AC} .

Pour toute série u de S, et pour tout entier naturel n , on note U_n la somme partielle d'ordre n : $\forall u \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et par convention $U_{-1} = 0$.

Pour toute sérié u de S_C , on note U sa somme, et pour tout entier naturel n, on note $R_n(u)$ son reste d'ordre n, ou plus simplement R_n s'il n'y a pas d'ambiguité sur u :

$$\forall u \in S_C \quad , \quad U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad R_n = U - U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et par convention : $R_{-1} = U$.

D'une manière générale, étant donné un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et une norme N sur E, on note (E, N) l'espace vectoriel normé obtenu.

Partie I

Dans cette partie, on poura éventuellement utiliser les séries σ_p ($p \in \mathbb{N}$) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \sigma_{p,n} = \delta_{n,p} \quad , \quad \delta \text{ étant le symbole de Kronecker.}$$

Ainsi, pour tout entier naturel p donné, σ_p est la série dont les termes sont nuls, sauf le p-ième, égal à 1 .

1°) a) Soit $u = [u_n]$ une série convergente à termes réels positifs ou nuls. Montrez qu'il existe une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls, tendant vers $+\infty$ en croissant, telle que la série $[\alpha_n u_n]$ soit convergente.

A SUIVRE

Indication : Si les u_n ne sont pas tous nuls à partir d'un certain rang, on pourra utiliser la suite (α_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \qquad (\text{avec } R_n = R_n(u))$$

ou utiliser toute autre méthode.

b) Soit $u = [u_n]$ une série divergente à termes réels positifs ou nuls.

Montrez, de façon analogue, qu'il existe une suite $\alpha = (\alpha_n)$ de réels strictement positifs, tendant vers 0 en décroissant, telle que la série $[\alpha_n\ u_n]$ soit divergente.

c) Quelles sont les significations pratiques des résultats des questions a) et b) ?

2°) Normes sur S_{AC} :

a) Soit $\alpha = (\alpha_n)$ une suite de réels positifs ou nuls. Montrez que la propriété :

"Pour toute série $u = [u_n]$ à termes réels positifs ou nuls et convergente, la série $v = [\alpha_n\ u_n]$ est convergente"

est vraie si et seulement si la suite (α_n) est majorée.

Indication : dans le cas où la suite (α_n) n'est pas majorée, on pourra montrer l'existence d'une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad \alpha_{\varphi(n)} \geqslant n + 1$$

ou utiliser toute autre méthode.

b) Soit $\alpha = (\alpha_n)$ une suite de réels positifs ou nuls et majorée.
Montrez que l'application N_α définie par :

$$\forall\, u = [u_n] \in S_{AC} \overset{N_\alpha}{\mapsto} N_\alpha(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k |u_k| \in \mathbb{R}_+$$

est bien définie.

Montrez que c'est une norme sur S_{AC} si et seulement si la suite (α_n) est à valeurs strictement positives.

c) Soit $\alpha = (\alpha_n)$ et $\beta = (\beta_n)$ les suites définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad \alpha_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{n!} \, .$$

Les normes N_α et N_β sont-elles équivalentes sur S_{AC} ?

d) Plus généralement, on suppose que les suites α' et β' permettent de définir des normes (cf. 2°)b)) .

Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que les normes $N_{\alpha'}$ et $N_{\beta'}$ soient équivalentes.

3°) Pour toute suite $\gamma = (\gamma_n)$ vérifiant les conditions telles que N_γ soit une norme, on définit l'application φ :

$$\forall\, u = [u_n] \in (S_{AC},\ N_\gamma) \overset{\varphi}{\mapsto} \varphi(u) = U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \in (\mathbb{C},\ |\ |)$$

(où $|\ |$ désigne le module sur $\mathbb{C}$) .

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

a) Soit $\gamma = \alpha$, où α est la suite définie au 2°)c) .
L'application φ est-elle continue ?

b) Soit $\gamma = \delta$, où δ est la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = 1$.
L'application φ est-elle continue ?

c) Plus généralement, soit $\gamma = (\gamma_n)$ une suite telle que N_γ soit une norme. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur γ pour que l'application φ soit continue.

Partie II

Séries absolument convergentes d'ordre p

Soit ψ l'application définie par :

$$\forall\, u = [u_n] \in S_{AC} \overset{\psi}{\mapsto} \psi(u) = [R_n]_{n \in \mathbb{N}} \in S_o$$

avec : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $R_n = R_n(u)$, reste d'ordre n de la série u .

Par définition, on dit qu'une série $u = [u_n]$ de S_{AC} est absolument convergente d'ordre au moins 0 .
On dit qu'elle est absolument convergente d'ordre au moins 1 si et seulement si la série $\psi(u)$ est absolument convergente.
De proche en proche, pour tout entier $p \geqslant 1$, on dit que la série $u = [u_n]$ est absolument convergente d'ordre au moins p si et seulement si elle est absolument convergente et si la série $\psi(u)$ est absolument convergente d'ordre au moins p−1 .

Ainsi, si la série $u = [u_n]$ est absolument convergente d'ordre au moins p, les séries u, $\psi(u)$, ..., $\psi^p(u)$ sont absolument convergentes.
On dit qu'une série u est absolument convergente d'ordre p si et seulement si les séries u, $\psi(u)$, ..., $\psi^p(u)$ sont absolument convergentes et $\psi^{p+1}(u)$ n'est pas absolument convergente.
On dit qu'une série est absolument convergente d'ordre infini si et seulement si elle est absolument convergente d'ordre au moins p, pour tout entier naturel p .

1°) Montrez que ψ est une application linéaire. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

2°) Soit u une série à termes réels positifs ou nuls, et pour tout entier n, R_n son reste d'ordre n .

a) Etant donné un entier naturel n, exprimez la somme partielle d'ordre n de la série $[R_k]$ en fonction de celle de la série $[k\, u_k]$ et de R_n .

b) Montrez que si u est absolument convergente d'ordre au moins 1, alors :

$$n\, R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ .$$

c) Réciproquement, si la série u est convergente, et si la suite (R_n) vérifie la propriété précédente, u est-elle convergente d'ordre 1 ?

3°) a) Soit a un nombre complexe non nul, et q un nombre complexe tel que $|q| < 1$.
Montrez que la série u définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = aq^n \quad \text{(et en particulier, } u_o = a\text{)}$$

est absolument convergente d'ordre infini.

Donnez une relation simple entre les termes généraux des séries $[u_n]$ et $[R_n]$.

Réciproquement, on suppose que $[u_n]$ est une série convergente pour laquelle la relation précédente est vérifiée. La série $[u_n]$ est-elle géométrique ?

A SUIVRE

b) Montrez que pour tout entier naturel p , l'ensemble E_p des séries absolument convergentes d'ordre au moins p est un sous-espace vectoriel de S_{AC} .
Le sous-espace vectoriel E_p est-il de dimension finie ?

c) Soit deux séries u et v à termes positifs ou nuls.
Montrez que si : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et si u est absolument convergente d'ordre au moins p , v est absolument convergente d'ordre au moins p .

d) Soit p un entier naturel non nul, et N_δ la norme introduite au I-3°)b), soit :

$$\forall\, u \in S_{AC} \quad , \quad N_\delta(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \ .$$

L'application ψ définie par : $\forall\, u \in (E_p, N_\delta) \mapsto \psi(u) \in (E_{p-1}, N_\delta)$ est-elle continue?

4°) Soit α un réel tel que $\alpha > 1$, et u_α la série de terme général :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{\alpha,n} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \ .$$

a) Démontrez la double inégalité :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \int_{k+1}^{k+2} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \ .$$

b) Montrez que la série u_α est absolument convergente d'ordre fini p_α , et précisez l'entier p_α en fonction du réel α .

c) Soit $\alpha = 3$, et u et v les séries de termes généraux :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = \frac{1}{(n+1)^3} \ , \text{ et } \ v = \psi(u) \ , \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3} \ .$$

Déterminez des valeurs approchées des sommes U et V de ces séries à 10^{-2} près, en exposant les méthodes utilisées.

5°) Soit $[u_n(z)]$ une série entière de terme général :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad , \quad u_n(z) = a_n z^n \qquad \text{où } a = (a_n) \text{ est une suite complexe.}$$

Soit R le rayon de convergence de cette série entière (fini ou infini) .

Montrez que pour $|z| < R$, la série $[u_n(z)]$ est absolument convergente d'ordre infini.

Partie III Série de matrices

Soit n un entier naturel non nul fixé, et soit $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On définit sur F la norme N par :

$$\forall\, A = [a_{jk}]_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \mapsto N(A) = \max_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} |a_{jk}|$$

où a_{jk} désigne le terme de A situé sur la j-ième ligne et la k-ième colonne (il n'est pas demandé de montrer que N est une norme sur F).

On dit que la série $[Q_p]$ de matrices de F est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles associée (U_p) définie par : $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $U_p = \sum_{k=0}^{p} Q_k$ est convergente dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé (F, N) .

Dans ces conditions, la somme U de la série $[Q_p]$ est notée : $U = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k$.

On dit que la série $[Q_p]$ de F est normalement convergente si et seulement si la série numérique $[N(Q_p)]$ est convergente.

1°) Montrez que toute série $[Q_p]$ de F normalement convergente est convergente.

2°) Soit A une matrice diagonalisable de F , de polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k) .$$

Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que la série de matrices $[Q_p]$ définie par :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \ , \quad Q_p = A^p \quad \text{(et en particulier, } Q_o = A^0 = I \text{, matrice identité)}$$

soit convergente, et montrez que cette série est également normalement convergente.

Calculez la somme U de cette série en fonction de A et I .

3°) Soit A une matrice quelconque de F .

Montrez que la série de matrices $[B_p]$ définie par : $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $B_p = \frac{A^p}{p!}$ est convergente. On notera exp(A) sa somme.

4°) On suppose n = 4, et A est la matrice définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Déterminez deux scalaires α_2 et β_2 tels que : $A^2 = \alpha_2 A + \beta_2 I$.

b) Déterminez les termes généraux des suites (α_p) et (β_p) telles que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \ , \quad A^p = \alpha_p A + \beta_p I .$$

c) Déterminez exp(A) sous la forme : $\exp(A) = aA + bI$ où a et b sont des réels dont on donnera une expression aussi simple que possible.

d) Montrez que la série de matrices $[R_p]$ définie par : $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente, et calculez sa somme R sous la forme :

$$R = cA + dI$$

où c et d sont des réels dont on donnera une expression aussi simple que possible.

***

FIN